系所別：天文研究所　科目：普通物理

五題請全作，每題為20分

1. 一高速運動之粒子，其靜止質量為m，速度為$\vec{v}$，動量為$\vec{p}$，而能量為E，根據愛因斯坦特殊相對論可知前述各物理量滿足 $\vec{p}=\gamma m\vec{v}$, $E=\gamma mc^2$, $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$（其中之$c$為光在真空中之速度）。假設此粒子不受任何外力作用，即所謂自由（相對性）粒子，試證此粒子之能量與速度滿足

(a) $E^2=c^2\vec{p}\cdot\vec{p}+m^2c^4$, (b) $\vec{v}=\frac{c^2\vec{p}}{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}}$

考用

(c) 如果有一粒子，其靜止質量為零，問其能量E及速度$\vec{v}$為何？

2. 一質量為m之行星環繞質量為M之太陽($M\gg m$)。假設太陽固定不動，且行星之運動乃以太陽為中心之圓形軌道，試證 (a) 圓運動之週期（即行星繞太陽一圈所需時間）之平方與軌道半徑之立方成比例 (b) 如果K與U分別表示行星之動能與位能，試證 $K=-\frac{1}{2}U$, $E=\frac{1}{2}U$ 其中之E為總能，且問此總能E之值究竟是正數或負數？其物理意義為何？(c) 假設太陽為一均勻球體其質量之密度ρ為常數，則在太陽表面附近上空以圓形軌道繞日之小天體之週期與太陽密度ρ之平方根成反比而與太陽之半徑及太陽之質量無關，試加證明之！

3. 設有一體積為V之容器，內裝理想氣體而容器內氣體所含粒子之總數為N，從牛頓運動第二定律出發，探討氣體中粒子與容器壁之彈性碰撞，因而導出此理想氣體之壓力P滿足

$$PV=\frac{1}{3}Nm\langle v^2\rangle \qquad (1)$$

(1)式中之m乃各別粒子之質量，而$\langle v^2\rangle$表示粒子速度平方之平均值。利用氣體動力論之Equipartition of Energy定理證明(1)式可寫成常見之形式

$$PV=nRT \qquad (2)$$

上式(2)式中之n為摩爾數，T為絕對溫度，$R=N_0k$，N_0為一摩爾中之粒子數（即Avogadro常數），k為Boltzmann常數。

4. 根據Rutherford氏原子模型：帶電荷Ze之原子核可視為一「點電荷」而電子則可視為一均勻球形分布（其中心有原子核合一）之電子雲其所帶之總電荷為$-Ze$，且此電子雲之半徑為R，利用Gauss定理證明（見下頁）

注意：背面有試題

系所別: 天文研究所　　科目: 普通物理

在原子內$(r<R)$之電場為$\vec{E}=\hat{r}E$，而$E(r<R)$之值為（$\hat{r}$為徑向單位向量）

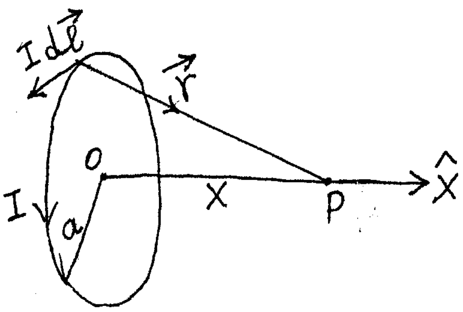
$$E(r<R)=\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r^2}-\frac{r}{R^3}\right]$$，問在原子外$(r>R)$之電場為何？

且證此原子模型之電荷分布所產生之電位為

$$V=\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r}-\frac{3}{2R}+\frac{r^2}{2R^3}\right\}\quad(r<R)$$

問$V(r>R)$之值為何？

5. 一半徑為a之圓形線圈，攜帶電流I（如下圖所示）



從Biot-Savart定律出發，求在此線圈對稱軸上任意一點P處由此線圈所產生之磁場，答案以x, a, I等物理量表示之，且明確說明此磁場之方向！且證明P點與線圈中心O之距離如果遠較線圈半徑a更大時（即$|x|\gg a$），則磁場強度與$[|x|]^{-3}$成比例。