1. Let
$$f(x) = \begin{cases} (y^x - 1)/x & \text{if } x \neq 0 \\ \ell n\, y & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Is $f(x)$ continuous at $x = 0$? Why?　　　　　　　　　　　　　(5%)

   (b) Find $f'(x)$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(5%)

2. Find $f'(0)$ for $f(x) = \int_{-x}^{e^x} (1 + y)dy$　　　　　　　　　　　(10%)

3. Find $\int_0^\infty e^{\frac{x^2}{2}} dx$　　　　　　　　　　　　　　　　　　(10%)

4. Find the representative of $\ell n(1 + x)$. Indicate the interval of convergence and estimate the related error.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(10%)

5. Let f and g be real-valued functions. Prove that
$$\left(\int f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int f^2(x)dx \right) \left(\int g^2(x)dx \right).$$
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(10%)

6. Let
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Find the eigenvalues of A　　　　　　　　　　　　　　　　(6%)

   (b) Find the eigenvectors of A associated with the eigenvalues in (a)　(10%)

   (c) Find the eigenvalues and eigenvectors of A^{-1}　　　　　　　(8%)

7. Let $\underset{\sim}{x}'_1 = (1, 1, 1)$, $\underset{\sim}{x}'_2 = (1, 0, 2)$, $\underset{\sim}{x}'_3 = (0, 1, 2)$

   (a) Find the rank of $\sum_{i=1}^{3} \underset{\sim}{x}_i \underset{\sim}{x}'_i$　　　　　　　　　　　　　　　(6%)

   (b) Let $X = [\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \underset{\sim}{x}_3]$. Find $\sum_{i=1}^{3} \underset{\sim}{x}'_i (X'X)^{-1} \underset{\sim}{x}_i$　　　　　(8%)

8. Let A be a $n \times n$ symmetric matrix and $A^2 = A$. Show that

   (a) every eigenvalues of A is either 1 or 0　　　　　　　　　　(6%)

   (b) trace A=rank A　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(6%)