

所別：統計研究所碩士班 不分組科目：數理統計

注意：所有答案務必寫在答案卷上，如寫在題目試紙上不予計分。

第一部分：填空题，下面有 10 個空格，其代號分別為 (A), (B), (C), ..., (J)，請先在答案卷上標明代號後再寫下答案，不用寫下推導與計算過程。每空格 4%，共計 40%。

1. 令 X_1, \dots, X_{16} 是來自常態分布 (normal distribution) $N(\theta, 1)$ (即未知的平均值 (mean) $= \theta$, $-\infty < \theta < \infty$, 變異數 (variance) $= 1$) 的一組隨機樣本 (random sample), 樣本數為 16。
 定義 $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$, $S^2 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{16} (X_i - \bar{X})^2$, $\bar{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$, $\bar{Y}_k = \frac{1}{16-k} \sum_{i=k+1}^{16} X_i$,
 $U_k^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}_k)^2$, $V_k^2 = \frac{1}{16-k-1} \sum_{i=k+1}^{16} (X_i - \bar{Y}_k)^2$, $k = 2, \dots, 14$ 。

(i) $\bar{X}_8 - \bar{Y}_8$ 的分布是 (A) ; $2(\bar{X}_8 - \bar{Y}_8)/U_8$ 的分布是 (B) ; U_8^2/V_8^2 的分布是 (C) ; $\bar{X}_{10} + \bar{Y}_6$ 的變異數是 (D) , $U_8^2 + V_8^2$ 的平均值或期望值 (expectation) 是 (E) 。

(ii) 若已觀測到 $\bar{X} = 10$, $S^2 = 4$, 則信賴係數 (confidence coefficient) 正好等於 95% 的 θ 之信賴區間 (confidence interval) 是 (F) ; 此一信賴區間包含 θ 的機率是 (G) 。

2. (i) 某便利商店架上 12 瓶牛乳有一瓶是壞掉的。顧客購買時是隨機取走。若你去購買時，架上只剩 2 瓶，則你買到壞牛乳的機率是 (H) 。

(ii) 學校某位秘書中文打字，每打 200 字平均有一個字打錯。若她打錯字的個數是屬於卜阿松分布 (Poisson distribution), 則打 400 個字，最多打錯 2 個字的正確機率為 (I) (不用化簡答案)。

(iii) 假設某一可觀測的隨機變數的平均值 θ 存在，下面有三個敘述

(a) 樣本平均值 (sample mean) 是 θ 的充分統計量 (sufficient statistic),

(b) 樣本平均值是 θ 的不偏估計量 (unbiased estimator),

(c) 樣本平均值是 θ 的最佳不偏估計量 (best unbiased estimator) 。那些敘述永遠成立或為真，答案是 (J) (必須全對才給分)。

第二部分：以下題目請詳細作答，共 60%。

3. 假設隨機樣本 X_1, \dots, X_n 是來自常態分布 $N(1, \sigma^2)$, 即平均值為 1, 變異數 σ^2 未知, 且 $\sigma^2 \geq 10$ 。

(a) 除了樣本 (X_1, \dots, X_n) 與順序統計量 $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ 是 σ^2 的充分統計量外，請再找出其他亦是 σ^2 的充分統計量。 (5%)

(b) 找出 σ^2 的最佳不偏估計量。 (10%)

(c) 找出 σ^2 的最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。 (10%)

(d) 前述 (b) 與 (c) 之估計量，那一個較佳，提出你的看法。 (5%)

注意：背面有試題

所別：統計研究所碩士班 不分組科目：數理統計

4. 某一工程師欲檢定某一有興趣隨機變數 X 是否來自均勻分布 $U(0, 2)$ 或是 $U(1, 3)$, 因 $U(0, 2)$ 是屬於標準作業下的分布, 而 $U(1, 3)$ 是屬於改良作業下之分布, 所以設定虛無假設 $H_0: X \sim U(0, 2)$ 與對立假設 $H_1: X \sim U(1, 3)$ 。又因取樣成本很高, 所以樣本數愈少愈好, 最後決定最多只能隨機取出 20 個觀測值。

(a) 請提出一個節省成本亦是較佳的檢定方法。 (10%)

(b) 詳細描述如何計算此一方法的型 I 誤差與型 II 誤差(不用化簡答案)。 (7%+3%)

5. 假設有一隨機樣本 X_1 與 X_2 , 若 X_1 與 X_2 均有機率函數(probability function)

$P(X = 1 + \theta) = P(X = \theta - 1) = 1/2, -\infty < \theta < \infty$, 即 X_1 (或 X_2) 的觀測值為 $1 + \theta$

或 $\theta - 1$ 各有 $\frac{1}{2}$ 的機率, 但 θ 未知。在未觀測資料前, 請構造 θ 的 $100(1 - \alpha)\%$ 信賴集

合(confidence set), 即此一集合包含 θ 且它的信賴係數為 $(1 - \alpha)100\%$ 。在觀測到資料

$X_1 = x_1$ 與 $X_2 = x_2$ 後, 對於此一信賴集你有何看法? (7%+3%)

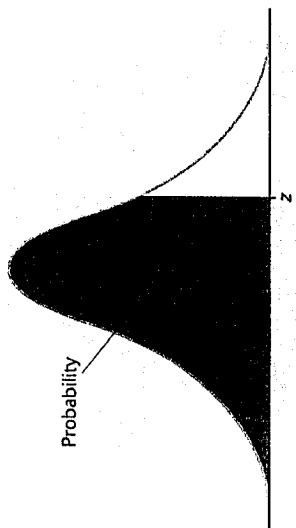


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

Standard normal probabilities (continued)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8483	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9221	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9923	.9924	.9925	.9926	.9927	.9928	.9929

t distribution critical values

df	Upper tail probability p									
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.282	2.398	2.821	3.250	
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	

