國立中央大學八十八學年度碩士班研究生入學試題卷

所別: 數學研究所 不分組 科目: 數值分析

(請注意, 考題共有 6 題, 總分 100 分)

1. (*20* points) (1) 請求出以下的極限?

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

(2) 令 x 是電腦程式語言中宣告爲雙精度浮點數的一個變數. 假設此語言的編譯程式 (compiler) 會正確計算 sin(x) 到十五位有效數字. 以下分別是 x 的值和它對應的計算結果, 請解釋爲什麼出現這種現象?

x	(x-sin(x))/(x*x*x)
10^{-4}	0.16666666148319
10^{-5}	0.16666728489944
10^{-6}	0.16665373237228
10^{-7}	0.17205356741103
10^{-8}	0
10^{-9}	0

2. (*20* points) 令 A 是一個 $m \times n$ 階的實數矩陣, $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ 分別是 n 維和 m 維的行向量 (column vector). 考慮以下之線性聯立方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

(2.1) 請問 (1) 中有幾個未知數? 幾條方程式?
(2.2) 若 $m < n$ 而且 $\operatorname{rank}(A) = m$, 請說明並解釋 (1) 會是無解? 還是有唯一解? 還是有無窮多組解?
(2.3) 若 $m = n$ 而且 $\operatorname{rank}(A) = m$, 請說明並解釋 (1) 會是無解? 還是有唯一解? 還是有無窮多組解?
(2.4) 若 $m > n$ 而且 $\operatorname{rank}(A) = n$, 請說明什麼時候 (1) 無解? 什麼時候 (1) 有唯一解?

3. (*10* points) 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

請用部份轉軸的高斯消去法 (Gaussian elimination with partial pivoting) 將矩陣 A 轉換成一個上三角矩陣.

4. (*10* points) 等式

$$\sin \frac{1}{x} = 0$$

有一個根是 $x = \frac{1}{2\pi} \approx 0.1592$. 利用牛頓法 (Newton iteration method) 寫一個程式, 計算這個根的數值估計:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

但是我若給初始值 $x_0 = 0.1$, 則牛頓法收斂到 0.1061; 若給 $x_0 = 0.2$, 則收斂到 0.06366. 程式沒有寫錯, 請解釋爲什麼會有這種現象?

5. (*20* points) 所謂基本形式的辛普森數值積分法 (Simpson's quadrature rule) 是

$$\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt \approx \frac{h}{3}\Big(f(x-h)+4f(x)+f(x+h)\Big)$$

(5.1) 令 Π_n 是所有階數 $\leq n$ 的多項式所成之集合. 證明

$$\int_{x-h}^{x+h} p(t)\,dt = \frac{h}{3}\Big(p(x-h)+4p(x)+p(x+h)\Big), \quad \forall p(x)\in\Pi_3$$

(5.2) 若 $f(x)$ 在 $(\hat{x}-h,\hat{x}+h)$ 內至少四次連續可微 (即 f'''' 存在且連續). 請寫出 $f(x)$ 以 $\hat{x}$ 爲參考點所展開的三階泰勒多項式 (Taylor polynomial of degree 3) 和誤差項 (error term).

(5.3) 繼續前面對於 $f(x)$ 的假設, 請導出

$$\left|\int_{\hat{x}-h}^{\hat{x}+h} f(t)\,dt - \frac{h}{3}(f(\hat{x}-h)+4f(\hat{x})+f(\hat{x}+h))\right|$$

的誤差估計 (應該有一項是 h^5).

(5.4) 所謂合成的辛普森數值積分法就是先將 $[a,b]$ 等分成 N 段, 其中 N 是偶數. 每段長度爲

$$h=\frac{b-a}{N}$$

令積分節點爲 $x_0=a$, $x_1=a+h$, $x_2=a+2h$, …, $x_N=b$, 然後在每兩段之間做一個基本形式的辛普森數值積分法. 結合起來就是

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big(\alpha_0 f(x_0)+\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\cdots+\alpha_N f(x_N)\Big)$$

請問 $\alpha_i = ?$ $(i=0,1,\ldots,N)$

(5.5) 設 x_i 和 α_i $(i=0,1,\ldots,N)$ 如前一小題中所述. 請導出

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{N}\alpha_i f(x_i)\right|$$

的誤差估計 (應該有一項是 h^4).

6. (*20* points) 令 Π_n 是所有階數 $\leq n$ 的多項式所成之集合. 令 $q(x)$ 是一個特別的 $n+1$ 階多項式, 使得

$$\int_a^b p(x)q(x)\,dx = 0, \quad \forall p(x)\in\Pi_n$$

設 $q(x)$ 在 (a,b) 內有 $n+1$ 個不同的根, 就說是 x_0, x_1, …, x_n.

(6.1) 請說明如何決定 $n+1$ 個參數 α_0, α_1, …, α_n 使得

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i p(x_i), \quad \forall p(x)\in\Pi_n$$

(6.2) 設 x_i 和 α_i $(i=0,1,\ldots,n)$ 如前一小題中所述. 證明

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i p(x_i), \quad \forall p(x)\in\Pi_{2n+1}$$

這就是所謂的高斯數值積分法.