

# 國立中央大學八十五學年度碩士班研究生入學試題卷

序別: 工業管理研究所 乙組 科目: 微積分 共 1 頁 第 1 頁

1. (10%) Find the vertical and horizontal asymptotes of the rational function:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 2}$$

2. (10%) If  $y = \sin(a \sin^{-1} x)$ , prove:  $(1 - x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0$ .

3. (10%) Find the maximal volume of a right circular cylinder contained within the sphere with radius  $R$ .

4. (10%) Find the integral:  $\int \frac{1}{(1 - \sin^2 x)\sqrt{1 + \tan x}} dx$ .

5. (10%) Find the following limit, if it exists:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)(3n+k)}$ .

6. (10%)

(a) 求與兩向量  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$  及  $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$  正交之單位向量。(4%)

(b) 設  $A(-9, 7, -4)$ 、 $B(5, -2, 3)$ 、 $C(1, 2, 3)$ 、 $D(a, b, 6)$  為空間中共平面四點，且  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，試求  $a$ 、 $b$  之值。(6%)

7. (10%) 判斷下列級數之斂散性。

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + n}}$  (5%)

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$  (5%)

8. (10%) 求解:  $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$ .

9. (10%) 設  $w = f(xy/x^2 + y^2)$  是  $u = xy/x^2 + y^2$  的可微分函數，試證

$$x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0.$$

10. (10%) 某公司欲製造二型的電話，第一型電話每個可賣  $100 - 2x$  元，第二型電話每個可賣  $125 - 3y$  元，但生產第一型電話  $x$  個及第二型電話  $y$  個時所需要的成本是  $12x + 11y + 4xy$  元，請問第一型與第二型電話分別要生產幾個才能得到最大的獲利？

參考用