

可不必依題號順序作答，只寫答案而無過程者不予計分。

一、簡答題：

1. 一組向量作為一個向量空間(vector space)的基底(basis)的充要條件為何?(5%)
2. 已知 $F(x, y, z)=0$ 及 $G(x, y, z)=0$ 兩個面(surfaces)相交於A點，試問這兩個面在A點互相垂直的充要條件為何?(5%)
3. 請說明 $\exp(x)$ ， $\exp(-x)$ 與 $\exp(4x)$ 是否為線性相依(linearly dependent)，其中 \exp 表示指數「e」。(未說明理由者不給分)(5%)
4. 若矩陣[A]為可對角化(diagonalizable)，則 $[A]=[Q][D][Q]^{-1}$ ，其中[D]為對角矩陣，請說明[Q]是否為唯一。(未說明理由者不給分)(5%)

二、求解下列微分方程式(20%)

$$y''' - y' = xe^x$$

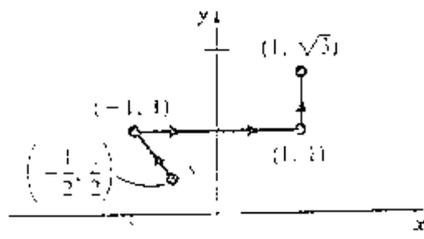
三、假設一湖之任一點(x, y, z)的溫度變化與原點距離的平方成反比。若已知 $T(0, 0, 1)=50$ 。試求

- (1)在點(2, 3, 3)處沿點(3, 1, 1)的方向的溫度變化率(10%)
- (2)在點(2, 3, 3)處溫度變化率最大的方向(5%)
- (3)在點(2, 3, 3)處的最大溫度變化率(5%)

四、已知力的大小為

$$F = \frac{2}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{1}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

求該力沿下圖所示的路徑所作的功(20%)



五、已知下列行列式與其值的關係為

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (A) \times (B) \times (C) \times (D) \times (E) \times (F) \quad \times: \text{乘號}$$

請問上式中的(A)、(B)、(C)、(D)、(E)和(F)之值為何。(20%)