

國立中央大學八十八學年度碩士班研究生入學試題卷

所別： 統計研究所 不分組 科目： 數理統計 共 2 頁 第 / 頁

第 I 部份：

1. 隨機變數 X, Y 和 Z 有下列聯合機率密度函數 (joint probability density function)

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & 0 < x < y < 1, \quad 0 < z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

計算 $P_r(4X > Y \mid 4Z < 2)$ 。(8%)

2. 若 X 的動差母函數 (moment generating function) 是 $\varphi(t) = (\frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{2t})^{20}$, $-\infty < t < \infty$ 。
求 X 的機率分配 (probability distribution)。(6%)

3. 隨機變數 X 具有下列機率密度函數

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

求 $X^{-\frac{1}{2}}$ 的期望值，即 $E[X^{-\frac{1}{2}}]$ 。(6%)

4. 判斷下列敘述是否成立，如不成立說明理由：

兩個隨機變數 X 與 Y ，若 X 與 Y 的機率分配 (或分布) 相等，則 X 等於 Y 。(5%)

第 II 部份：

5. 假設選美活動每一位參加者都附予一個連續編號，但參加者和編號之間的配對是隨機指定。現在假設最後決選的十位參加者之編號是 X_1, \dots, X_{10} 。

(a) 試以動差法 (method of moments) 與最大概似法估計總參加人數。(12%)

(b) 以上二種方法，哪一種較佳？請說明。(8%)

6. 某大學有 100 位學生參加選修課程國文文選期中段考，授課老師欲估計這 100 位學生的平均分數，打算從這 100 位學生中抽出 n 位學生的平均分數，來估計此 100 位學生的平均分數。他考慮使用抽出的過程有下列兩種：

(I) 隨機從 100 位學生的分數中逐一取出 20 位，每一分數抽出不放回。

(II) 隨機從 100 位學生的分數中逐一取出 20 位，每一分數抽出後放回。

(a) 請說明為何使用抽出學生的平均分數，作為估計 100 位學生的平均分數之優點。(5%)

(b) 過程 (I) 與 (II) 哪一種較好？並說明較好的理由。(12%)

7. 假設隨機變數 X_1, \dots, X_n 是來自常態分配 $N(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$ 的隨機樣本。求 θ^2 的最佳不偏估計量。(8%)

國立中央大學八十八學年度碩士班研究生入學試題卷

所別： 統計研究所 不分組 科目： 數理統計 共 2 頁 第 2 頁

隨機樣本 X_1, \dots, X_n 是取自指數分配

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x > \theta, -\infty < \theta < \infty, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

- (a) 求 θ 的最小充分統計量 (minimal sufficient statistics)。(5%)
- (b) 導出檢定虛無假設 $H_0: \theta = \theta_0$ 與對立假設 $H_1: \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ 且型 I 誤差 (或檢定大小) 為 α 的最佳檢定 (請解釋何謂最佳檢定)；當 $\theta_0 = 1, \theta_1 = 2$, 且 $\alpha = 0.05$, 求此一最佳檢定之型 II 誤差。(15%)
- (c) 使用 (a) 最小充分統計量, 對 θ 構造具有 $1 - \alpha$ 信賴水準的信賴區間。(10%)