所別：數學系碩士班 乙組(一般生) 科目：基礎數學

以下共有十題，每題 10 分

1. 假設 $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$，其中 $f(t)=\int_1^{t^2}\frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\,du$． 求 $F''(2)$．

2. 使用中間值定理 (Intermediate Value Theorem) 與平均值定理 (Mean Value Theorem)，證明方程式 $x^5+10x+3=0$ 僅有一個實數根

3. 假設函數 $f(x)\in C^4[x_0-h,x_0+h]$，證明
$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left\{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)\right\}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi),$$
這裡 $\xi\in(x_0-h,x_0+h)$．

4. 求函數 $f(x,y,z)=x+2y+3z$ 在平面 $x-y+z=1$ 與圓柱 $x^2+y^2=1$ 相交曲線上的最大值．

5. 利用變數更換 (change of variables) 求雙重積分 $\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dA$ 之值，這裡的 D 為一梯形區域，頂點為 $(1,0)$，$(2,0)$，$(0,-2)$，與 $(0,-1)$．

6. 證明若 A 與 AB 矩陣都可逆 (invertible)，則 B 矩陣也可逆

7. 若 A 與 B 為近似矩陣 (similar matrix)，即 $A\sim B$，則

   (a) 證明 det A = det B

   (b) 若 B 與 C 為近似矩陣，證明 A 與 C 也為近似矩陣

8. $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$，若 A 的反矩陣可以寫成由矩陣 A 所構成的線性函數，即 $A^{-1}=F(A)$，請問 F(A) 應為何 ?

9. 若 $\|A\|\overset{\text{def}}{=}\max\limits_{X\neq 0}\frac{\|AX\|}{\|X\|}$，今假設 A 為 SPD (symmetric positive definite) 矩陣，請證明 $\|A\|$ 為 A 矩陣最大的 eigenvalue

10. 欲求某線性系統 $AX=B$ 的解，其中矩陣 A 為 SPD，若向量 B 有初始誤差為 ΔB，因而引發解的誤差為 ΔX，也就是 $A(X+\Delta X)=B+\Delta B$，請證明以下的不等關係，
$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}\leq C\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$$
這裡的 C 為僅與矩陣 A 有關的常數 (提示 : 利用 $\|AX\|\leq\|A\|\|X\|$)