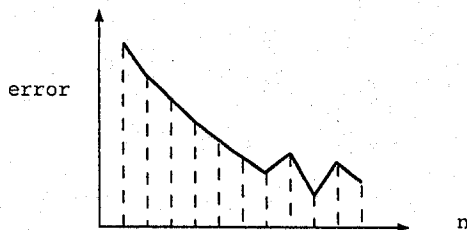


所別：數學系碩士班 不分組科目：數值分析

以下共有六題，請任選五題，每題 20 分

1. (a) (5 分) 某生撰寫程式計算某問題的數值解，假設其所使用的數值方法會使得數值誤差 (error)，即 $e_n = |u - u_n|$ ，以 $e_{n+1} = Ce_n$ 的比例減少，這裡 u 為正解 (exact solution)， u_n 為第 n 次循環後的數值解， C 為介於 0 與 1 之間的常數，為了檢驗程式的正確性，特別將每次循環後的數值誤差算出，並繪成下圖，



當其檢查各次計算誤差的比值，即 $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ ，發現當數值誤差不是很小時，其比值會趨近於一個介於 0 與 1 之間的常數，但是當計算誤差很小時，其比值卻不固定，有時很大，有時很小，然而誤差都會穩定地在某一固定範圍內跳動，請問可否推論其程式有問題。若無，原因何在，請解釋

- (b) (5 分) 在數值計算上只要有使用到小數的浮點運算則一定會有截去誤差 (round-off error)，請問是否正確，請說明你的理由
- (c) (10 分) 請說明數值方法的收斂速率 (rate-of-convergence) 為何？今若使用某數值方法迭代計算一正解 (exact solution) 為 10.0 的問題，假設在迭代過程中，迭代產生的數據為 {15.000, 10.833, 10.032, 10.000}，請問此數值方法的收斂階數 (order of convergence) 為何？
2. 若要使用牛頓迭代法計算函數 $f(x)$ 在 $x=r$ 的數值根， r 的數值為未知，假設函數在 $x=r$ 共有 p 個重根，則牛頓迭代法的迭代公式為

$$x_{n+1} = x_n - p \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. 假設以下的數值積分法對三階以下的多項式函數都能準確無誤的將其積分計算出來，

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_0 f(-1) + w_1 f(1) + w_2 f'(-1) + w_3 f'(1)$$

請問這裡的 w_0, w_1, w_2, w_3 係數應該為多少

注意：背面有試題

參考用

所別：數學系碩士班 不分組 科目：數值分析

4. 若有一聯立方程組如下，

$$T(v) = T(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$v = (x, y, z)$ ，若 $v_n = (x_n, y_n, z_n)$ ，請導出牛頓迭代法的迭代公式為

$$v_{n+1} = v_n - \begin{bmatrix} f_x(v_n) & f_y(v_n) & f_z(v_n) \\ g_x(v_n) & g_y(v_n) & g_z(v_n) \\ h_x(v_n) & h_y(v_n) & h_z(v_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f(v_n) \\ g(v_n) \\ h(v_n) \end{Bmatrix}$$

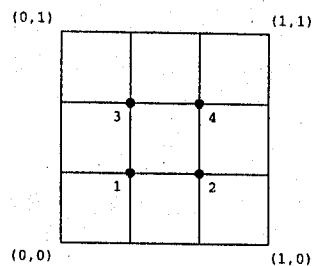
這裡的 $f_x(v_n)$ 為 $f(v_n)$ 對 x 的偏微分，其它依此類推

5. 若將聯立方程式寫成 $Ax = b$ 表示，其中 A 為 $n \times n$ 的矩陣， x 與 b 皆為 $n \times 1$ 的向量，今若使用高斯消去法求 x 的數值解，請推演在計算上共須要使用到 $O(n^3)$ 的計算量。如果矩陣 A 為所謂的三列對角矩陣 (tridiagonal matrix)，則又須要使用多少的計算量。
6. 使用五點的差分公式 (five-point formula) 計算以下的問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5 \quad \text{in } (0, 1) \times (0, 1)$$

u 在邊界上的數值為 0，請使用區間大小 $h = \frac{1}{3}$ 的方式組成矩陣型式 $Au = b$ ，則 A 與 b 分別為何

註： A 為 4×4 的矩陣， b 為 4×1 的向量，不須計算 u 的解



參考用