

## 〔任選五題作答〕

1. (a) (10 分) 數值計算中可能出現的誤差, 可分為哪三種? 請分別說明之  
 (b) (10 分) 今有一程式碼之片段 (pseudo-code) 如下:

```

i = 0.0          // i 為浮點數
LOOP
  if ( i <= 1.0 ) then
    do something
    i = i + 0.1
  endif
go to LOOP
  
```

在某些計算機上, 此迴圈可能被執行 10 次, 而在某些計算機上, 此迴圈可能被執行 11 次, 原因為何?

2. (a) (10 分) 證明以下的迭代法

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{N}{x_n} \right) \quad N > 0$$

對任何起始值  $x_0$  皆收斂, 且收斂值為  $\sqrt{N}$

- (b) (10 分) 今用某一數值迭代法計算 16 的平方根而得到以下數據, { 10. , 5.8 , 4.279 , 4.009 , 4.000 } , 請問如何估算此迭代法的收斂階數 (order of convergence) ?
3. (a) (6 分) 試證使用 Simpson  $\frac{1}{3}$  數值積分法, 積分三次或三次以下的多項式函數, 其積分誤差為零
- (b) (7 分) 使用  $n$  點的高斯(Gauss)積分法, 可準確的積至多少次的多項式函數皆沒有誤差, 原因為何?
- (c) (7 分) 推導一點之高斯積分法公式, 若已知 Legendre polynomial 為  $P_1(x) = x$

注意：背面有試題

# 國立中央大學八十七學年度碩士班研究生入學試題卷

所別： 數學研究所 不分组 科目： 數值分析 共 2 頁 第 2 頁

4. (20 分) 假設有以下三組數據

x	0	1	2
f(x)	2	1	2

若假設二階導數在  $x = 0$  時為 0，請使用 quadratic spline (也就是 spline 有連續的第一階導數)，來估計  $x = 1.5$  的函數值

5. (a) (10 分) 假設某一初始值問題(initial-value problem)有正確解(exact solution)，今若使用 Euler method 計算此問題之解，可獲得合理的計算結果，且得到正確的 GE(global error) =  $O(h)$ ， $h$  為 step size。但若使用其它較精確的數值方法，解同一問題時，則得到幾乎是零的誤差，但其  $GE = O(h^n)$  的階數  $n$  與此數值方法理論所預測的值完全不符，請問是何原因造成？這樣的數值結果可以接受嗎？
- (b) (10 分) 對一個初始值問題， $y' = f(x, y)$ ，與起始條件， $y(x_i) = y_i$ ，試證以下計算方法

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)))$$

的誤差為  $O(h^3)$ 。也就是說  $y(x_{i+1}) = y_{i+1} + O(h^3)$

6. (a) (10 分) 推導 Newton method 的迭代公式，求以下聯立方程式之根

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - x_1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2^2 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

- (b) (10 分) 假設起使值  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ，使用 steepest descent method 執行一步，找出以下函數的最小值

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 8x_2$$