參考用

下列每題各 20分.

1. 在計算兩個 $n \times n$ 矩陣 A和B之乘積有下列之方法.
首先將A, B各分成 4個 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ 之矩陣 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$
令 $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ 表示 A, B之乘積, 則 $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

為了計算 $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$, 我們用了下列之算法,

$P = (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})$, $Q = (A_{21}+A_{22})B_{11}$, $R = A_{11}(B_{12}-B_{22})$, $S = A_{22}(B_{21}-B_{11})$, $T = (A_{11}+A_{12})B_{22}$,

$U = (A_{21}-A_{11})(B_{11}+B_{12})$, $V = (A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$.

$C_{11} = P+S-T+V$, $C_{12} = R+T$, $C_{21} = Q+S$, $C_{22} = P+R-Q+U$

如果我們用了以上之方法將矩陣乘積由 $n \times n$ 矩陣逐次遞迴至 1×1 矩陣,
請証明此方法之 Complexity $t(n) = O(n^{\log_2 7})$

2. 請用 PASCAL 語言寫一程式, 此程式可以驗証兩個 Binary Trees T_1 和 T_2 是否相同.

3. 一個 INFIX INPUT A*(B+C)*D 可以轉換成 POSTFIX OUTPUT ABC+*D*, 請用 PASCAL 語言寫一程式, 此程式可將 INFIX 轉變成 POSTFIX.

4. 一個 Threaded Binary Tree 之 PASCAL Type declaration 如下：

```
Type  Threadedpointer = ↑Threadedtree;
      Threadedtree = Record
                        Leftthread : Boolean;
                        Leftchild : Threadedpointer;
                        data      : Char;
                        Rightchild : Threadedpointer;
                        Rightthread : Boolean;
                     end;
```

Threaded Binary Tree 可以幫我們找出在 Inorder Traversal 中某一個 Node 將要 visit 的下一個 Node 是誰, 請寫一個 Function 可以在 Threaded Binary Tree 中找到 Inorder Successor, 並藉由此 Function 寫一個 Procedure, 此 Procedure 可以將此 Threaded Binary Tree 中之 data 按照 Inorder 次序印出.

5. 在做 Quicksort average time complexity analysis 中, 我們得到下列之公式,

$T(n) \le cn + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(T(j-1)+T(n-j))$ $(n \ge 2)$

$T(0) \le b$, $T(1) \le b$.

請証明 $T(n) = O(n \log_e n)$