

第一部份：微積分

1. 請求底下的積分：

(1.1) (4分) $\int x^2 e^x dx$

(1.2) (4分) $\int x \log x dx$

(1.3) (6分) $\int \frac{dx}{26-4x+1x^2}$

(1.4) (6分) $\int \frac{x+1}{1+x^2} dx$

2. (the integral test) 請證明底下的定理：設 $t \mapsto f(t)$ 是一個連續非負且遞減的函數，其定義域為 $t \geq 1$ 。(2.1) (10分) 若積分 $\int_1^{\infty} f(t) dt$ 存在，則下面的數列收斂：

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots$$

(2.2) (10分) 若上述積分不存在，則上述數列發散。

3.

(3.1) (10分) 請證明底下的定理：如果 $p_0 > p_1 > p_2 > p_3 > \dots > 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ ，則下面的數列收斂：

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + \dots$$

(3.2) (5分) 底下的數列是否收斂：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

4.

(4.1) (5分) 是否存在一個函數 $f(x, y)$ 使得 $f_x = 5y$, $f_y = 2x$?(4.2) (10分) 請找一個函數 $f(x, y)$ 滿足

$$f_x = 3x^2y - 2y^2, \quad f_y = x^3 + 4xy - 1, \quad f(1, 1) = 4$$

參考用

第二部份：向量分析與線性代數

5. (10分) 設 A 是 $m \times n$ 的矩陣。請證明

$$\text{row rank}(A) = \text{column rank}(A)。$$

6. (10分) 設 A 是 $m \times m$ 的非奇異(nonsingular)矩陣, B 是 $m \times n$ 的矩陣, C 則是 $n \times n$ 的非奇異矩陣。請證明: $\text{rank } AB = \text{rank } B = \text{rank } BC$ 。

第三部份：常微分方程

7. (10分) 考慮下面的常微分方程組:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$$

其中 $x(t)$ 是 2×1 的行向量, A 是 2×2 的矩陣, x_0 則是起始點(initial point)。設 λ_1 與 λ_2 是 A 的特性根(eigenvalue), 而且 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ 。請問起始點位在何處時, $x(t)$ 會收斂到原點。

參考用