國立中央大學八十四學年度碩士班研究生入學試題卷

所別：太空科學研究所　組　科目：應用數學　

1. 解下列常微分方程式

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$，其中 $y(0)=0,\ y(1) = \dfrac{e}{2}$ (10%)

(b) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2$ (10%)

2. 請回答下述問題

(a) 寫出某一函數 f(x) 的 Fourier Cosine Integral 的表示式 F(k) (2%)

(b) 再寫出 F(k) 的 Inverse Fourier cosine integral 的表示式 (2%)

(c) 求出函數 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<a \\ 0, & x>a \end{cases}$ 的 Fourier cosine integral 的表示式 (4%)

(d) 應用 (c) 的結果，求下式積分值

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ak)\cos(kx)}{k}dk \qquad (7\%)$$

3. 請回答下述問題

(a) 若某函數 f(z) 在封閉曲線 C 內，除 $z=z_k$, $k=1,2,\ldots,M$, 點外，均為解析，請根據此函數的特性寫出留數定理 (Residue Theorem) (3%)

(b) 應用 (a) 的結果求下式積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx \quad (m \ge 0,\ a > 0) \qquad (12\%)$$

4. 已知格林定理的第一式 (First Form of Green's Theorem) 為

$$\iiint_R [\varphi_1\nabla^2\varphi_2 + (\nabla\varphi_1)\cdot(\nabla\varphi_2)]dZ = \oiint \hat{n}\cdot(\varphi_1\nabla\varphi_2)d\sigma$$

(a) 證明 $\iiint_R [\varphi\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)^2]dZ = \oiint_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma$ (5%)

(b) 應用 (a) 之結果，證明在區間 R 內，滿足 Laplace's equation $\nabla^2\varphi = 0$，且在 R 之邊界上 φ 之值已指定時，其解只有一個 (10%)

5. 下述線性方程組

$$\begin{aligned} ay + z &= b \\ ax + bz &= 1 \\ ax + ay + 2z &= 2 \end{aligned}$$

在下列給定的條件下，參數 a 及 b 的值各為多少 (i) 有唯一解 (unique solution) 時，(ii) 有一參數解 (A one-parameter family solution) 時，(iii) 有兩參數解 (A two-parameter family solution) 時，(iv) 無解時。 (20%)

6. 請回答下述問題

(a) 寫出 $\nabla\times\vec{A}$ 之微分型式及積分型式的定義 (5%)

(b) 若 $\vec{A} = \frac{k}{r}\hat{e}_\theta$ 其中 r 及 θ 分別為圓柱座標上的變數，亦即 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 與 $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$，而 $\hat{e}_\theta$ 為 θ 增加方向之單位向量，求 $\nabla\times\vec{A}$。 (3%)

(c) 由 (b) 所得的結果在 r=0 處成立嗎? (2)%

(c) 利用 Stoke's 定理，求線積分 $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ 之值，在此 C : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, z=0, 同時軌跡 C 係以 θ 增加的方向為準。 (5%)