

所別：地球物理研究所碩士班 一般生 科目：微積分

作答時須列出完整計算過程

1. (a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 15} = ?$  (6%)

(b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 1} = ?$  (6%)

2. (a)  $y = \ln[\sin(e^{3x})]$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$  (6%)

(b)  $y = 3^x$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$  (6%)

3. (a)  $\int \frac{dx}{x^2 - 9} = ?$  (6%)

(b)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx = ?$  (6%)

4. 求通過圓錐面  $x^2 + y^2 - z^2 = 7$  上之一點  $(2, 2, 1)$  的切平面與法線?  
(12%)

5. 利用三重積分(triple integrals)計算半徑為  $a$  之球體體積?  
(12%)

注意：背面有試題

所別：地球物理研究所碩士班 一般生 科目：微積分

6. 利用泰勒級數證明：

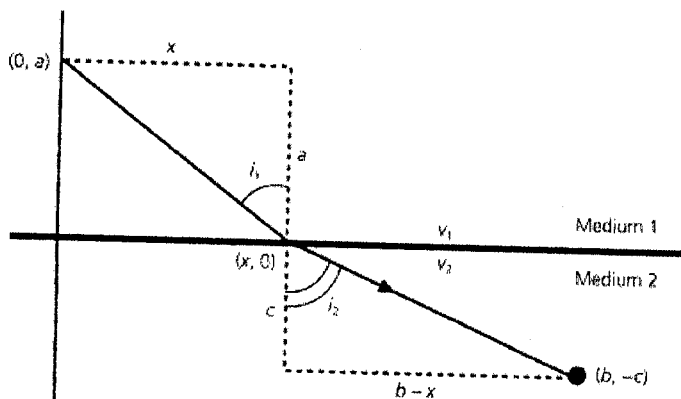
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{for all } x \text{ in } (-1,1)$$

where the binomial coefficient  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ ,

$\alpha$  is real number and  $k$  is integer. (12%)

7. "Fermat's principle" 告訴我們「光在兩點間行走的路徑是最短時間路徑」，請參考附圖：(i) 導出折射點在  $(x, 0)$  時，光從  $A(0, a)$  到  $B(b, -c)$  的走時函數  $T(x)$  (8%) (ii) 用 Fermat's principle 證明 Snell's

law, 即  $\frac{\sin i_1}{V_1} = \frac{\sin i_2}{V_2}$  (8%)。



8. 已知放射性元素的衰減速率與現有的量成正比。證明某放射性元素衰減至一半現有量所須的時間  $T_{1/2}$  (半衰期) 與其衰減常數  $(\lambda)$  的關係為  $\lambda T_{1/2} = \ln 2$ . (12%)