

所別：環境工程研究所碩士班 甲組 科目：工程數學

乙組

1. (25%)

- 1) 已知 $V = \{y(x) \mid xy'' - 3y' = 0, x > 1\}$. 證明 V 為一向量空間。
- 2) 試求 V 的「維度」(dimension)。
- 3) 現有任何二向量空間 U 及 Γ , 在此定義 $U+\Gamma$ 如下
 $\{w \mid w = u+v, \forall u \in U, v \in \Gamma\}$
 令 $W = \{u(z) \mid u^{(4)} - 6u^{(3)} + 9u'' = 0, z > 1\}$.
 若 $p \in (W+V)$, 試將 p 表示為其基底的線性組合(linear combinations of its basis)。
- 4) 試求 $W+V$ 的「維度」(dimension)。

2. (25%)

- 1) 試將下列各矩陣對角化 (diagonalize)

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- 2) 對一 $n \times n$ 之實數矩陣而言, 若滿足 $x^t \cdot Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, 則稱其為正定 (positive definite) 矩陣。試判定上述之 A_1, A_2, A_3 是否為正定矩陣?
- 3) 試求 $(A_1)^{10}$ 。

3. (25%)

考慮邊界值問題:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \delta(x-3), \quad y(0) = 0, \quad y(5) = 0,$$

其中 $\delta(x-3)$ 為 Dirac's delta 函數。已知此問題的解可表示為

$$y(x) = f(x) \sin(x-3) - g(x) \sin x,$$

請求出 $g(x)$ ($g(x)$ 也可能是常數)。

4. (25%)

請計算以下積分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 64} dx$$