參考用

1. 有一隨機變量向量 $\tilde{y}$，其與另一隨機變量向量 $\tilde{x}$ 有線性關係 $\tilde{y}=a+A\tilde{x}$．向量 a 和矩陣 A 僅含常數係數．倘若已知 $\tilde{x}$ 之協變方矩陣 Σ_{xx}，請依協變方矩陣之定義，求證 $\tilde{y}$ 之協變方矩陣是 $\Sigma_{yy}=A\Sigma_{xx}A^T$．（10%）

2. 令 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

(a) 若"誤差傳播定律"（Law of Error Propagation）為

$$m_y^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2 \text{ 時，}$$

其成立之基本假設為何？（5%）

(b) 全微分 $dy=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$，

此與 (a) 中之"誤差傳播定律"

① 有何數學/統計上意義之差異．（5%）

② 試舉一矩形面積之計算例，說明二者之差異．（5%）

3. 在觀測量 $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ 與參數 $\hat{x},\hat{t}$ 間存在有非線性關係；觀測量含有隨機誤差，如 $\hat{a}=a+v_a\cdots$；參數(真值)可用近似值與改正量來表達，如 $\hat{x}=x^0+dx\cdots$． 今有下列的五條觀測方程式：

$$a + v_a = f_a(\hat{x}, \hat{t}) \quad \cdots\cdots (1)$$

$$b + v_b = f_b(\hat{x}, \hat{t}) \quad \cdots\cdots (2)$$

$$c + v_c = f_c(\hat{x}, \hat{t}) \quad \cdots\cdots (3)$$

$$x + v_x = \hat{x} \quad \cdots\cdots (4)$$

$$t + v_t = \hat{t} \quad \cdots\cdots (5)$$

參考用

其中 $a, v_a; b, v_b; c, v_c$ 單位均是 (mm)；$\hat{x}$ 的單位是 (rad)；$\hat{t}$ 單位爲 (sec)，試以加權最小二乘法估計 $\hat{x}$ 及 $\hat{t}$。

(a) 各觀測量間不相關，請問它們的權之單位是什麼？ (8%)

(b) 法方程式係數矩陣之逆陣 Q，其各元素的單位是什麼？(8%)

(c) 後驗權單位中誤差 $\hat{\sigma}_0$ 之單位是如何推導而得？ (9%)

4.(15%)已知 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$，亦即，Ax=b

（1）求解，

（2）求 A 的階數（rank）與零數（nullity），

（3）求 A 的列空間（row space），

（4）判斷並解釋 b 是否屬於 A 的行空間（column space）。

5.(20%)已知 $f(x,y)=e^{x+3y}$。在點 P (0,0) 處，

（1）求 f 沿著 u=(2,1) 的方向導數，

（2）求 f 的法向導數（normal derivative），

（3）已知 $e^{2z}+3=[f(x,y)+1]^2$ 表示在三度空間中的曲面，求通過點(0,0,0)處的切面方程式。

（4）同（3），求通過點(0,0,0)的法線與下列直線間的最短距離。

$$y-3=z-5,\ x=1$$

6.(15%)已知 $u=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$v=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$w=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^4$

（1）若以 u,v,w 爲基底，在 R^4 展開一向量集合 V，判斷並解釋 V 是否爲一向量空間，

（2）求 $\dim V$，

（3）以 u,v,w 爲準，建立一組正交單位基底向量。