

國立中央大學100學年度碩士班考試入學試題卷

所別：遙測科技碩士學位學程碩士班 不分組(一般生) 科目：應用數學 共 / 頁 第 / 頁

本科考試可使用計算器，廠牌、功能不拘

*請在試卷答案卷(卡)內作答

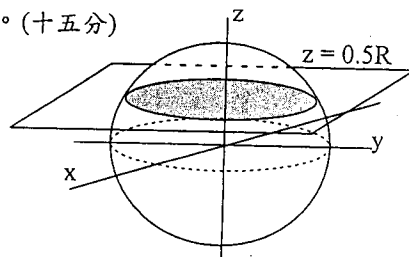
一、平面直角坐標系第一象限裡兩個點位坐標為 (a, b) 和 (c, d) 。從原點到該點為鄰邊，所形成平行四邊形的面積會等於絕對值 $|ad - bc|$ 。試證明此敘述無誤。(十五分)

二、某行(Column)向量為 $\mathbf{r} = (X, Y, Z)^T$ ，其長度 $|\mathbf{r}| > 0$ 。試推導微分

$$\text{式子： } d|\mathbf{r}| = \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (\text{二十分})$$

三、欲迴歸雙線性曲面， $a + bx + cy + dxy$ ，於縱向數據 $z_i = f(x_i, y_i)$ 之間， $i = 1, 2, \dots, n$ 且 $n > 4$ 。倘若等權建構該曲面，每數據點離曲面的垂直誤差為 ε_i 。當求解係數 (a, b, c, d) 時，採最小二乘平差法，或以 $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ 值為極小化對象，試排列出多餘觀測情況下，方程組所需向量及矩陣每一元素。(十五分)

四、空間中有一個半徑為 R 的球，球心在原點，灰色區域為球體與 $z = 0.5R$ 平面交會的截面，請利用積分求取球在此截面上方之體積。(十五分)



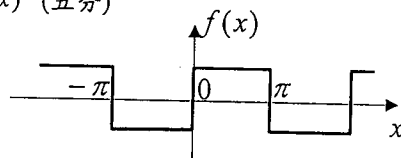
五、已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，(1) 求此矩陣之固有值(eigenvalues)、固有向量

(eigenvectors)及反矩陣(請寫下計算過程)；(十五分) (2) 利用運算結果求解聯立微分

$$\text{方程式 } \begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = 2y_2 + y_3 \\ y_3' = 3y_2 + 4y_3 \end{cases} \quad \text{初始值 } \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 2 \\ y_3(0) = 2 \end{cases} \quad (\text{十分})$$

六、利用傅立葉級數(Fourier Series)分解週期性方波 $f(x)$ (五分)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{if } -\pi < x < 0 \end{cases} \quad \text{and } f(x + 2\pi) = f(x)$$



並求值(請考慮無窮多項) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$ (五分)

參考用