參考用

數值分析

以下題目共有五題，每題 20 分，各小題的分數平均分配。

一： 簡答題（僅回答對錯沒有分數，須說明原因）

(a) 若 a 與 b 皆為雙精確度浮點數變數，請說明以下兩個迴圈分別印了幾個 x 字母(全對才給分)：

```
for ( a = 0 ; a <= 1.0 ; a = a + 0.25 ) printf("x") ;

for ( b = 0 ; b != 1.0 ; b = b + 0.1  ) printf("x") ;
```

(b) 有一個集合 $\{ a_n \mid a_n = 0.0001 \times n\ ,\ 1 \le n \le 10000 \}$，隨意由集合內取出一個數存入計算機內且沒有產生任何 round-off 誤差的機率為多少？

(c) 若使用複合梯形法對 $\int_a^b f(x)\,dx$ 作數值積分， $f(x)$ 為平滑函數，請問是否 h 越小，計算出來的積分值會越逼近真正函數的積分值？

(d) 使用牛頓迭代法來估算 $f(x) = x\,(x-1)^2$ 的兩個根， 0 與 1。請問在求解的過程中有何不同，有何須要留意的。

二： (a) 使用牛頓迭代法來推導 $\sqrt{2}$ 的近似值，請由起始值 2 起迭代兩次得到另外兩個估算值。接下來再由此三個數據（包含起始值 2）推導出牛頓迭代法的收斂階數 p (order of convergence)（只須列出 p 的推導式子公式，不須使用計算器）

(b) 若 $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 為複變函數，這裡 $z = x + i\,y$，且 $u(x,y)$ 與 $v(x,y)$ 分別為實數部份與虛數部份的平滑函數。若 $z_n = x_n + i\,y_n$，請推導 $f(z) = 0$ 複數根的牛頓迭代公式，即 $x_{n+1} = x_n + \ldots$ 與 $y_{n+1} = y_n + \ldots$。

三： Simpson's $\frac{1}{3}$ 積分公式是利用穿過三個在 X 方向的等距點 $(x_0, f(x_0))$，$(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$ 所構成的二次多項式差分函數 $P_2(x)$ 來對要積分的函數 $f(x)$ 由作近似積分，因此若積分函數 $f(x)$ 為任意穿過此三點的二次多項式函式，則使用 Simpson 積分公式來估算 $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$ 的積分時，其計算過程完全不會產生任何 truncation 誤差。但讓人吃驚的是應用同樣的 Simpson 積分公式於任意的三次多項式函式積分上，也是完全不會產生任何的 truncation 誤差，也就是：

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx$$

某生想證明這個性質，他假設要積分的函數 $f(x)$ 為穿過以上三個等距點的三次多項式，為了簡化問題，他移動座標軸使得 $(x_1, f(x_1))$ 落在原點上，也就是 $x_i = (i-1) \times h$，h 為固定的微小量，請由此假設證明以上的等式成立。(證明過程不須使用到 Simpson 積分公式)

注意：背面有試題

國立中央大學100學年度碩士班考試入學試題卷

所別：數學系碩士班 乙組(一般生)　科目：數值分析　共 2 頁 第 2 頁

本科考試禁用計算器　　　　　　　　　　　　　　　　*請在試卷答案卷（卡）內作答

四： 有一數值微分公式為

$$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

這裡的 ξ 介於 (a-h,a+h) 之間，若 $M=\max_{a-h\le x\le a+h} f'''(x)$，且 ε 為計算機所能產生的最大 round-off 誤差值。請推導此微分公式的整體誤差的大小，並找出最佳的 $h=h(M,\varepsilon)$ 使得整體誤差最小。這裡所謂的整體誤差為 truncation 誤差與 round-off 誤差之和。

五： 以下矩陣問題 AX = B，矩陣 A 的每一個 × 符號代表一非零數值，在矩陣左下角與右上角區域的元素皆為零。若 A 矩陣為 $n\times n$ 矩陣，第一行 a_{11} 到 a_{m1}，第一列 a_{11} 到 a_{1m} 皆為非零元素，請用 n 與 m 兩數估算高斯消去法的計算複雜度 (complexity)

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
a_{21} & \times & \times & \cdots & \times & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
\vdots & \times & \times & \times & \cdots & \times & 0 & \cdots & 0\\
a_{m1} & \cdots & \times & a_{mm} & \times & \cdots & a_{m\,2m-1} & 0 & 0\\
0 & \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times & 0\\
0 & 0 & \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & \cdots & 0 & \times & \cdots & \times & \times & \times & \times\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \times & \cdots & \times & \times & \times\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \times & \cdots & \times & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \times\\ \times\\ \times\\ \times\\ \times\\ \times\\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \times\\ \times\\ \times\\ \times\\ \times\\ \times\\ b_n \end{bmatrix}$$

注意：背面有試題